



TITLE:

# 気泡群に入射する圧力波の線形散乱(波動現象の数理解と応用)

AUTHOR(S):

矢野, 猛

---

CITATION:

矢野, 猛. 気泡群に入射する圧力波の線形散乱(波動現象の数理解と応用).  
数理解析研究所講究録 2007, 1543: 162-170

ISSUE DATE:

2007-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/80705>

RIGHT:

## 気泡群に入射する圧力波の線形散乱

北海道大学・大学院工学研究科 矢野 猛 (Takeru Yano)

Graduate School of Engineering,

Hokkaido University

### 1 はじめに

気液 2 相流, とくに気泡流は, 内部流れ・外部流れの如何を問わず水を扱う工学機器に関連して広く現れ, 最も取り扱いの難しい現象の一つに数えられる. たとえば, スクリュー周りやポンプ内部などの高速水流中に発生するキャビテーション気泡による機器の劣化と性能の低下や, 原子炉冷却水の蒸発による冷却効率の低下と冷却装置の破損などは, 古くからよく知られている気泡流現象であるが, その適切な制御は今なお重要な工学的課題である.

これまで, 気泡流現象の予測と制御を目的とした多様な数値モデルが提案され, それらのモデルの数理的性質や数値解法に関する多くの研究がなされてきた [1]. その中でも, 広く利用され, 実績があるモデルのひとつが 2 流体モデルである. このモデルは空間座標と時間 (あるいは空間座標のみ) に関する平均化を基礎とし, 平均量として定義される速度, 圧力, ボイド率を未知変数とする方程式系から構成される. 最近, われわれは, 気泡の激しい膨張と収縮, および, これにともなう気泡近傍の局所的な高圧と水中へ放射される強い圧力波を記述する 2 流体モデルの方程式系を, 空間座標に関する平均化 (体積平均化) を用いて導出した [2]. この方程式系は, 気泡近傍の局所圧力を未知変数として導入し, 液相の圧縮性を無視することなく, 首尾一貫した方程式系となっている. このため, 気泡の運動を支配する方程式として Keller の方程式 [3] を採用している.

われわれは, さらに, この方程式系の基本的性質を明らかにすることを目的として, 一様に分布する微細気泡を含む静止水中の線形波動伝播 [2], および, 一様に分布する微細気泡を含む気泡流中の線形波動伝播 [4] の理論解析を行った. その結果, 気泡流中には 2 つの圧力波のモード (fast mode と slow mode) と 2 つのボイド波が現れうることを示し, それらの分散関係を求め, すべての波数の擾乱に対して初期値問題が安定であることを明らかにした. ただし, 線形波動伝播の問題においては, 気泡の振動 (膨張・収縮) も微小振幅であることが仮定されるので, 気泡近傍に局所的な高圧は現れないことを注意しておく. 本研究では, 上記の問題を拡張し, 初期に微細気泡が空間的に非一様に分布している静止水中を伝播する線形波動を扱う.

### 2 問題

多数の微細な球形気泡を含む水中に音源が設置され, そこから音波が放射されている状況を考える. 音波は平面波であるとし, その波面に平行な方向には気泡径と気泡数密度を含むすべての物理量が一樣であるとする. このとき, 音波の波面に直交する方向に座標の  $x$  軸をとれば, 考える現象を空間 1 次元問題に定式化できる.

#### 2.1 基礎方程式

以下では,  $\alpha$  は気相の体積率 (ボイド率),  $\rho$  は流体の密度,  $u$  は速度,  $p$  は圧力であり, 添え字  $G$  と  $L$  はそれぞれ気相に属する変数と液相に属する変数を表す.

気泡流の運動は以下に示す保存則と気泡の運動方程式にしたがうとする [2]:

$$\text{気相の質量保存則} \quad \frac{\partial}{\partial t}(\alpha \rho_G) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha \rho_G u_G) = 0, \quad (1)$$

$$\text{液相の質量保存則} \quad \frac{\partial}{\partial t}[(1-\alpha)\rho_L] + \frac{\partial}{\partial x}[(1-\alpha)\rho_L u_L] = 0, \quad (2)$$

$$\text{気相の運動量保存則} \quad \frac{\partial}{\partial t}(\alpha \rho_G u_G) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha \rho_G u_G^2) + \alpha \frac{\partial p_G}{\partial x} = F, \quad (3)$$

$$\text{液相の運動量保存則} \quad \frac{\partial}{\partial t}[(1-\alpha)\rho_L u_L] + \frac{\partial}{\partial x}[(1-\alpha)\rho_L u_L^2] + (1-\alpha) \frac{\partial p_L}{\partial x} + P \frac{\partial \alpha}{\partial x} = -F, \quad (4)$$

ここで,  $P$  は気液界面の局所的な圧力であり,  $F$  は気液の相間の単位時間あたりの運動量輸送を表す.

保存則 (1)–(4) において, 気液界面の圧力  $P$  は界面の圧力の面積平均によって定義されているが, 他の変数はすべて体積平均によって定義されている. なお, Reynolds 応力に対応する項と粘性応力項は無視されている.

相間の運動量輸送項  $F$  として, 液相の圧縮性を考慮できるように拡張された付加慣性力

$$F = -\beta_1 \alpha \rho_L \left( \frac{D_G u_G}{Dt} - \frac{D_L u_L}{Dt} \right) - \beta_2 \rho_L (u_G - u_L) \frac{D_G \alpha}{Dt} - \beta_3 \alpha (u_G - u_L) \frac{D_G \rho_L}{Dt}, \quad (5)$$

を採用する [5]. ここで,

$$\frac{D_G}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_G \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{D_L}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_L \frac{\partial}{\partial x}$$

であり, また, 3つの係数  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) はふつう 3つとも  $\frac{1}{2}$  とすればよい.

気泡の運動は Keller の方程式

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{c_{L0}} \frac{D_G R}{Dt}\right) R \frac{D_G^2 R}{Dt^2} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3c_{L0}} \frac{D_G R}{Dt}\right) \left(\frac{D_G R}{Dt}\right)^2 \\ = \left(1 + \frac{1}{c_{L0}} \frac{D_G R}{Dt}\right) \frac{P}{\rho_{L0}} + \frac{R}{\rho_{L0} c_{L0}} \frac{D_G}{Dt} (p_L + P), \end{aligned} \quad (6)$$

にしたがうとする [3]. ただし,  $R$  は平均化された気泡の半径,  $\rho_{L0}$  は初期の静止状態の液相の密度,  $c_{L0}$  は初期の静止状態の液相の音速を表す.

多数の未知変数を含む保存則と気泡の運動方程式 (1)–(6) は, 以下に示す補助的な関係式を付加することによって閉じられる: 水に対する Tait の状態方程式,

$$(p_L + B) \rho_{L0}^n = (p_{L0} + B) \rho_L^n, \quad (7)$$

( $p_{L0}$  は初期の静止状態の液相圧力,  $B = 304.9 \text{ MPa}$ ,  $n = 7.15$ ), 気泡内気体のポリトロプ変化の関係式,

$$p_G \rho_{G0}^\gamma = p_{G0} \rho_G^\gamma, \quad (8)$$

( $\rho_{G0}$  と  $p_{G0}$  は, それぞれ, 初期の静止状態の気泡内気体の密度と圧力), 気泡内部の気体の質量保存則,

$$\rho_G R^3 = \rho_{G0} R_0^3, \quad (9)$$

( $R_0$  は初期の静止状態の気泡半径), 気液界面における圧力のつりあい,

$$p_G - (p_L + P) = \frac{2\sigma}{R}, \quad (10)$$

ただし,  $\sigma$  は表面張力である.

とくに,  $R_0, \rho_{L0}, p_{L0}, c_{L0}$  は定数であることを注意しておく.

## 2.2 無次元化

水中におかれた音源から放射される平面音波の角振動数を  $\omega$  とする. この平面波が気泡を含まない静止状態の水中を伝播する速度は音速  $c_{L0}$  であるので, その波長は  $\lambda_0 = 2\pi c_{L0}/\omega$  で与えられる. そこで, 代表長さを  $L = \lambda_0/(2\pi)$ , 代表速度を  $c_{L0}$ , 代表時間を  $1/\omega$  に選んで変数の無次元化を行う. すなわち,

$$\left. \begin{aligned} x &= Lx^*, \quad \omega t = t^*, \quad R = R_0(1 + \epsilon R'), \\ \frac{u_G}{c_{L0}} &= \epsilon u'_G, \quad \frac{u_L}{c_{L0}} = \epsilon u'_L, \quad \alpha = \alpha_0^* + \epsilon \alpha', \\ \frac{\rho_G}{\rho_{L0}} &= \rho_{G0}^*(1 + \epsilon \rho'_G), \quad \frac{p_G}{\rho_{L0} c_{L0}^2} = p_{G0}^*(1 + \epsilon p'_G), \\ \frac{\rho_L}{\rho_{L0}} &= 1 + \epsilon \rho'_L, \quad \frac{p_L}{\rho_{L0} c_{L0}^2} = p_{L0}^*(1 + \epsilon p'_L), \quad \frac{P}{\rho_{L0} c_{L0}^2} = \epsilon P \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここで, 上付きの添え字 \* は無次元数を表す. プライム (') がついている変数は, 初期の静止状態からの (無次元の) 摂動を表し,  $\epsilon$  ( $0 < \epsilon \ll 1$ ) は摂動の大きさを示すパラメータである. 物理的には音波のマッハ数を表しているといえる.

無次元変数の定義式 (11) において,  $\epsilon = 0$  とおくと,

$$\left. \begin{aligned} R &= R_0, \quad u_G = u_L = 0, \quad \alpha = \alpha_0^*, \quad \rho_G = \rho_{L0} \rho_{G0}^*, \\ p_G &= \rho_{L0} c_{L0}^2 p_{G0}^*, \quad \rho_L = \rho_{L0}, \quad p_L = \rho_{L0} c_{L0}^2 p_{L0}^*, \quad P = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

となる. これを, 基礎方程式系 (1)–(6) に代入し,  $R_0, \rho_{L0}, p_{L0}, c_{L0}$  が定数であることに注意しつつ整理すれば,

$$\frac{\partial(\alpha_0^* \rho_{G0}^*)}{\partial t^*} = 0, \quad \frac{\partial \alpha_0^*}{\partial t^*} = 0, \quad \frac{\partial p_{G0}^*}{\partial x^*} = \frac{\partial p_{L0}^*}{\partial x^*} = 0 \quad (13)$$

が得られ,  $\alpha_0^*$  は  $x$  の任意関数でよいことになる. さらに式 (7)–(10) を考慮すると,  $p_{G0}$  と  $p_{L0}$  は

$$p_{G0}^* = \frac{p_{G0}}{\rho_{L0} c_{L0}^2}, \quad p_{L0}^* = \frac{p_{L0}}{\rho_{L0} c_{L0}^2}, \quad \rho_{G0}^* = \frac{\rho_{G0}}{\rho_{L0}}, \quad (14)$$

$$p_{G0}^* - p_{L0}^* = \frac{2\sigma}{\rho_{L0} c_{L0}^2 R_0} \quad (15)$$

となって定数であることがわかる. つまり, 初期状態は, ボイド率  $\alpha_0^*$  は任意の空間分布をとり得るが, 他の変数はすべて一様な静止状態である. ここでさらに, ボイド率と気泡半径および気泡数密度  $n$  の間に成り立つ関係式

$$\alpha = \frac{4}{3} \pi R^3 n \quad (16)$$

を考えれば, 初期状態の気泡は, すべて同一の半径  $R_0$  をもち,  $\alpha_0^*$  に応じた空間的に非一様な数密度分布にしたがって分布していることがわかる.

### 2.3 線形化された方程式系

無次元変数の定義 (11) を基礎方程式系 (1)–(10) に代入し,  $\epsilon^2$  以上の小さい項を無視すれば, 線形化された方程式系

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} - 3\alpha_0(x) \frac{\partial R}{\partial t} + \alpha_0(x) \frac{\partial u_G}{\partial x} + \frac{d\alpha_0(x)}{dx} u_G = 0 \quad (17)$$

$$p_{L0}[1 - \alpha_0(x)] \frac{\partial p_L}{\partial t} - \frac{\partial \alpha}{\partial t} + [1 - \alpha_0(x)] \frac{\partial u_L}{\partial x} - \frac{d\alpha_0(x)}{dx} u_L = 0 \quad (18)$$

$$(\beta_1 + p_{G0}) \frac{\partial u_G}{\partial t} - \beta_1 \frac{\partial u_L}{\partial t} - 3\gamma p_{G0} \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

$$[1 - \alpha_0(x) + \beta_1 \alpha_0(x)] \frac{\partial u_L}{\partial t} - \beta_1 \alpha_0(x) \frac{\partial u_G}{\partial t} + p_{L0}[1 - \alpha_0(x)] \frac{\partial p_L}{\partial x} - \frac{d\alpha_0(x)}{dx} (\omega_B^2 + p_{L0} p_L) = 0 \quad (20)$$

を得る。ただし, 上付き添え字 \* と摂動量を表すプライムは省略し, 初期ボイド率が  $x$  のみの関数であることを明示するために  $\alpha_0(x)$  と書いた。また,  $\omega_B$  は半径  $R_0$  の気泡の固有角振動数を無次元化したもので, その定義は

$$\omega_B^2 = 3\gamma p_{G0} - 2\hat{\sigma}, \quad \left( \hat{\sigma} \equiv \frac{\sigma}{\rho_{L0} c_{L0}^2 R_0} \right) \quad (21)$$

である。式 (17)–(20) には,  $\beta_2$  と  $\beta_3$  が含まれていない。この問題においては式 (5) からの寄与は初項のみである。

さらに, Keller の方程式 (6) は次のように線形化される。

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + \frac{\omega_B^2}{\delta} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\omega_B^2}{\delta^2} R + \frac{p_{L0} p_L}{\delta^2} = 0 \quad (22)$$

式 (22) には, あらたに重要なパラメータ  $\delta$  が現れている:

$$\delta = \frac{R_0}{L} = \frac{R_0 \omega}{c_{L0}} = 2\pi \frac{R_0}{\lambda_0} \quad (23)$$

すなわち,  $\delta$  は波長に対する気泡半径の比の程度である。

ここで, 平均化の方法にとって重要である空間スケールについて確認しておく。平均化の方法が十分な精度で有効であるためには, 気泡半径が十分小さく, 平均化体積内に十分多数の気泡が存在していなければならない。これより

$$R_0 \ll n_0^{-1/3} \ll V^{1/3} \quad (24)$$

となる。ただし,  $V$  は平均化体積,  $n_0$  は初期の気泡数密度である。式 (24) に加えて, さらに, 注目する流体運動のスケールが平均化のスケールより十分大きいこと

$$R_0 \ll V^{1/3} \ll L = \frac{\lambda_0}{2\pi} \quad (25)$$

が成り立っていなければならない。したがって, 気泡半径は (気泡を含まない) 水中の音波の波長に比べて十分小さくなければならない。

ボイド率と気泡数密度の関係式 (16) と  $\delta$  の定義 (23) を考慮すれば, 式 (24) より

$$\alpha_0 = \frac{4}{3} \pi L^3 \delta^3 n_0 \ll 1 \quad (26)$$

であることがわかる。つまり, ボイド率は 1 に比べて十分小さくなければならない。

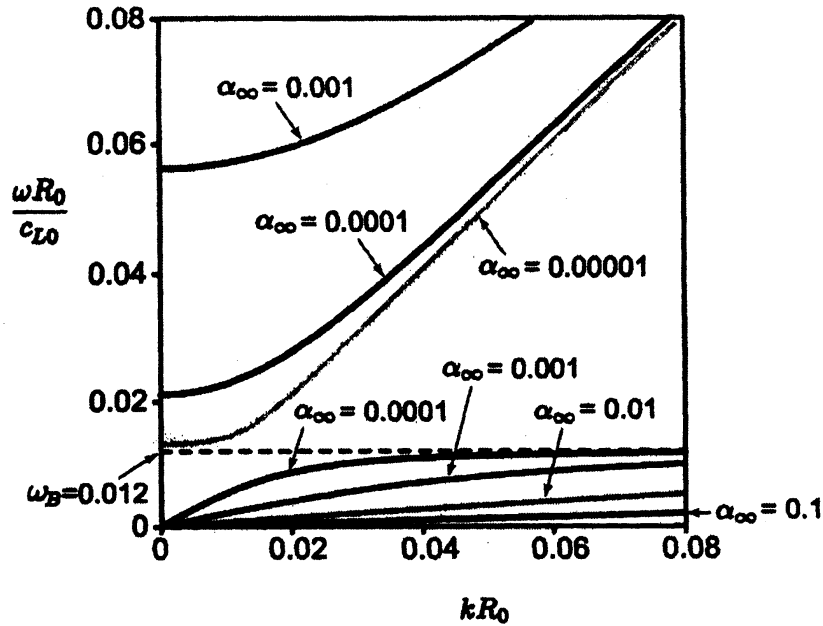


図 1: Dispersion relation in gas bubble-water mixture with uniform void fraction  $\alpha_0 = \alpha_\infty$ , where  $k$  is the wavenumber and  $\omega$  is the angular frequency. The upper branch is the fast mode and the lower one the slow mode [2].

### 3 非一様ボイド率の場の波動方程式

線形化された方程式系 (17)-(20), および (22) は, 5 つの変数  $R, \alpha, u_G, u_L, p_L$  に関して閉じた方程式系を構成している. これに対して,  $R$  以外のすべての変数を消去することが可能である. その結果,

$$A_1 \frac{\partial^4 R}{\partial t^4} + B_1 \frac{\partial^3 R}{\partial t^3} + A_2 \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + B_2 \frac{\partial R}{\partial t} + C_1 \frac{\partial R}{\partial x} + B_3 \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial t} + A_3 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial^3 R}{\partial x \partial t^2} + B_4 \frac{\partial^3 R}{\partial x^2 \partial t} + A_4 \frac{\partial^4 R}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (27)$$

を得る. ただし,  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ),  $B_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) は,  $\alpha_0(x)$  を含み, それをとおして  $x$  に依存する変数係数であり, 次式で与えられる:

$$A_1 = \delta^2 [1 - \alpha_0(x)] \quad (28)$$

$$A_2 = \omega_B^2 [1 - \alpha_0(x)] + 3\alpha_0(x) + \frac{\delta^2}{D_3^2} \beta_1 (1 - \rho_{G0}) (\beta_1 + \rho_{G0}) [\alpha_0'(x)]^2 + \frac{\delta^2 D_2}{D_3} \alpha_0''(x) \quad (29)$$

$$A_3 = -\frac{3\gamma p_{G0}}{D_3} [1 + \beta_1 - \alpha_0(x)] \alpha_0(x) - \frac{\omega_B^2 D_2}{D_3} [1 - \alpha_0(x)] \quad (30)$$

$$A_4 = -\frac{\delta^2 D_2}{D_3} [1 - \alpha_0(x)] \quad (31)$$

$$B_1 = \delta\omega_B^2[1 - \alpha_0(x)] = \frac{\omega_B^2}{\delta} A_1 \quad (32)$$

$$B_2 = \frac{\delta\omega_B^2}{D_3^2} \left\{ (\beta_1 + \rho_{G0})^2 - \left[ \beta_1^2(1 - \rho_{G0}) + \beta_1\rho_{G0}(3 - \rho_{G0}) + 2\rho_{G0}^2 \right] \alpha_0(x) + \rho_{G0}D_1[\alpha_0(x)]^2 \right\} \alpha_0''(x) \\ + \frac{\delta\omega_B^2}{D_3^2} \beta_1(1 - \rho_{G0})(\beta_1 + \rho_{G0})[\alpha_0'(x)]^2 \quad (33)$$

$$B_3 = \frac{\omega_B^2}{\delta} C_2 \quad (34)$$

$$B_4 = -\frac{\delta\omega_B^2 D_2}{D_3} [1 - \alpha_0(x)] = \frac{\omega_B^2}{\delta} A_4 \quad (35)$$

$$C_1 = -\frac{(3\gamma p_{G0} - \omega_B^2 \rho_{G0})\alpha_0'(x)}{D_3^2} \left\{ (1 + \beta_1)(\beta_1 + \rho_{G0}) - 2(\beta_1 + \rho_{G0})\alpha_0(x) + D_1[\alpha_0(x)]^2 \right\} \quad (36)$$

$$C_2 = \frac{\delta^2 \alpha_0'(x)}{D_3^2} \left\{ \rho_{G0} \left[ (3 + \beta_1)(\beta_1 + \rho_{G0}) + (\beta_1 - 5)(\beta_1 + \rho_{G0})\alpha_0(x) + 2D_1[\alpha_0(x)]^2 \right] \right. \\ \left. + (\beta_1^2 - \rho_{G0}^2)[1 - \alpha_0(x)] \right\} \quad (37)$$

$$D_1 = \beta_1 + \rho_{G0} - \beta_1\rho_{G0}, \quad D_2 = \beta_1 + \rho_{G0} - \rho_{G0}\alpha_0(x) \quad (38)$$

$$D_3 = [1 - \alpha_0(x) + \beta_1\alpha_0(x)]\rho_{G0} + \beta_1[1 - \alpha_0(x)] \quad (39)$$

Egashira ら [2] は、一様なボイド率分布 ( $\alpha_0 = \alpha_\infty = \text{定数}$ ) の微細気泡を含む静止水中に与えられた擾乱の線形伝播過程の解析を行い、式 (27) の係数  $B_i$  と  $C_i$  を含まない方程式を導き、進行波の線形分散関係を調べた。図 1 にその結果を示す。図から明らかなように、初期に与えられた任意の擾乱に含まれる波数成分  $k$  をもつ波は 2 つの角振動数  $\omega$  をとりうる。これは、与えられたひとつの初期擾乱に対して異なる伝播特性の 2 つの波が発生することを意味する。それらのうち、角振動数が大きい方を fast mode とよび、小さい方を slow mode とよぶ。古くから知られている気泡流中の圧力波は slow mode に対応するのに対し、液相の圧縮性を考慮することによって現れるのが fast mode である。文献 [2] では、衝撃波のような強い圧力波の前方に現れるプリカーサが fast mode であることが指摘されている。

fast mode の波は、すべての波数に対して slow mode より大きい位相速度をもつ。群速度についても、 $kR_0$  があまり小さくなくれば、fast mode の方が大きい。また、図 1 から、すべての波数に対して実数の角振動数が定まることもわかる。すなわち、われわれの基礎方程式系 (1)–(10) は、初期値問題に関して線形安定である。なお、図 1 に  $kR_0 < 0.1$  の領域しか示されていないのは、式 (24) の制約による。

式 (27) において、係数  $B_i$  をもつ項は線形化された Keller の方程式 (22) の左辺第 2 項に由来する項であって、振動する気泡が周囲に音波を放射することによって振動のエネルギーを失う効果 (いわゆる放射減衰) を表す。係数  $B_i$  をもつ項はすべて時間に関する奇数階微分を含む項であり、それゆえ、放射減衰の効果が波動伝播過程において波の減衰を引き起こすことを示している。一方、係数  $C_i$  をもつ項は、初期ボイド率が非一様な場合にのみ現れる項ある。

非一様ボイド率の場の波動方程式 (27) を解けば、任意に与えられた初期ボイド率分布  $\alpha_0(x)$  と任意の初期条件および境界条件のもとでの、微細気泡を含む水中の波の伝播過程を調べることが可能である。

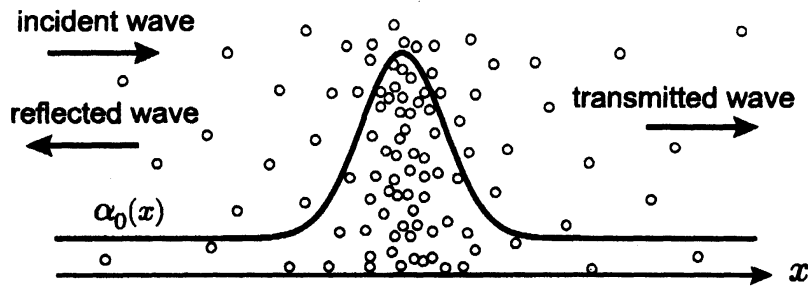


図 2: Schematic of scattering of plane pressure wave by a bubble cloud.

## 4 気泡群による圧力波の散乱

初期ボイド率が空間に局在したピークをもつ場合として

$$\alpha_0(x) = \alpha_\infty \left( 1 + c e^{-(x/\ell)^2} \right) \quad (40)$$

を考える。ここで、 $\alpha_\infty(1+c)$  はボイド率の極大値、 $\ell$  はボイド率変化の空間スケールの指標であって、ピークから離れれば ( $|x| \gg \ell$ ) ボイド率は急速に減衰してある一定値  $\alpha_\infty$  になる。これに、 $x$  軸の負の方向から角振動数  $\omega$  の圧力波 (音波) が入射し、局在したボイド率分布 (40) によって散乱される過程を調べる (図 2)。

### 4.1 入射波の波数

時間が音源の角振動数  $\omega$  を用いて無次元化されているので、無次元化された角振動数は 1 である。文献 [2] の結果を利用すると、無次元角振動数 1 に対応する圧力波の波数  $k$  は

$$k^2 = \frac{\beta_1[\omega_B^2 - \delta^2 + \alpha_\infty(3 + \delta^2 - \omega_B^2)](1 - \alpha_\infty)}{3\gamma p_{G0}\alpha_\infty(1 + \beta_1 - \alpha_\infty) + \beta_1(\omega_B^2 - \delta^2)(1 - \alpha_\infty)} \quad (41)$$

によって求められる。図 3 に波数と  $\delta$  および  $\alpha_\infty$  の関係を示す。2つの分枝のうち、右側が fast mode で左側が slow mode である。2つの分枝の間に伝播する波を与えない ( $k$  が準虚数となる)  $\delta$  の範囲がある (stop band)。なお、図 3 に示されているのは、常温・常圧の水の中に初期半径  $R_0 = 0.1$  mm の気泡が多数存在している場合である。初期気泡半径を小さくすると、2つの分枝の境界はわずかに右へ移動する。

### 4.2 散乱振幅の支配方程式と境界条件

無次元化された角振動数が 1 であることを考慮すると、式 (27) の解を

$$R = e^{i(kx-t)} + \Phi_S(x)e^{-it} \quad (42)$$

とおくことができる。ここで、入射波の無次元振幅を 1 とし、散乱波の無次元複素振幅を  $\Phi_S(x)$  とした。式 (27) に式 (42) を代入して整理すると、散乱振幅  $\Phi_S$  を支配する方程式

$$\mathcal{P} \frac{d^2 \Phi_S}{dx^2} + \mathcal{Q} \frac{d\Phi_S}{dx} + \mathcal{R} \Phi_S = \mathcal{S} \quad (43)$$



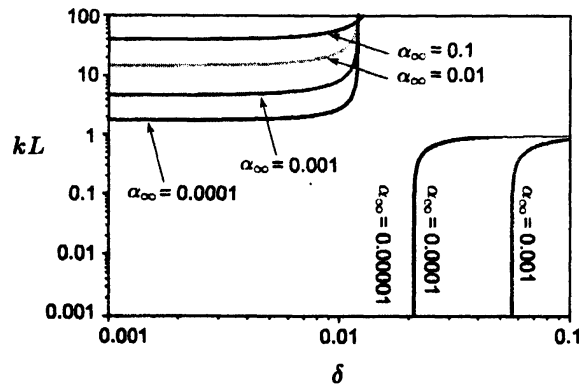


図 3: Nondimensional wavenumber,  $kL = k\lambda_0/(2\pi)$ , of pressure wave in water with a uniform void fraction distribution. The wave number  $k = 2\pi/\lambda$  is primarily determined by  $\omega$ ,  $\delta$  and  $\alpha_\infty$ . The left branch is the slow mode and the right the fast mode.

が導かれる。ここで、係数  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  はボイド率分布  $\alpha_0(x)$  と入射波  $e^{-kx}$  を含んでおり、 $x$  に依存する。紙数の都合によりその陽な関数形を示すことは差し控えるが、式 (27) から容易に求めることができる。

ボイド率のピークから十分に離れていれば、一様ボイド率分布とみなされるので、そこでの散乱波の波数は入射波のそれと等しい。よって、式 (43) に対する境界条件として

$$\frac{d\Phi_S}{dx} = ik\Phi_S \quad (x \gg \ell) \quad (44)$$

$$\frac{d\Phi_S}{dx} = -ik\Phi_S \quad (x \ll -\ell) \quad (45)$$

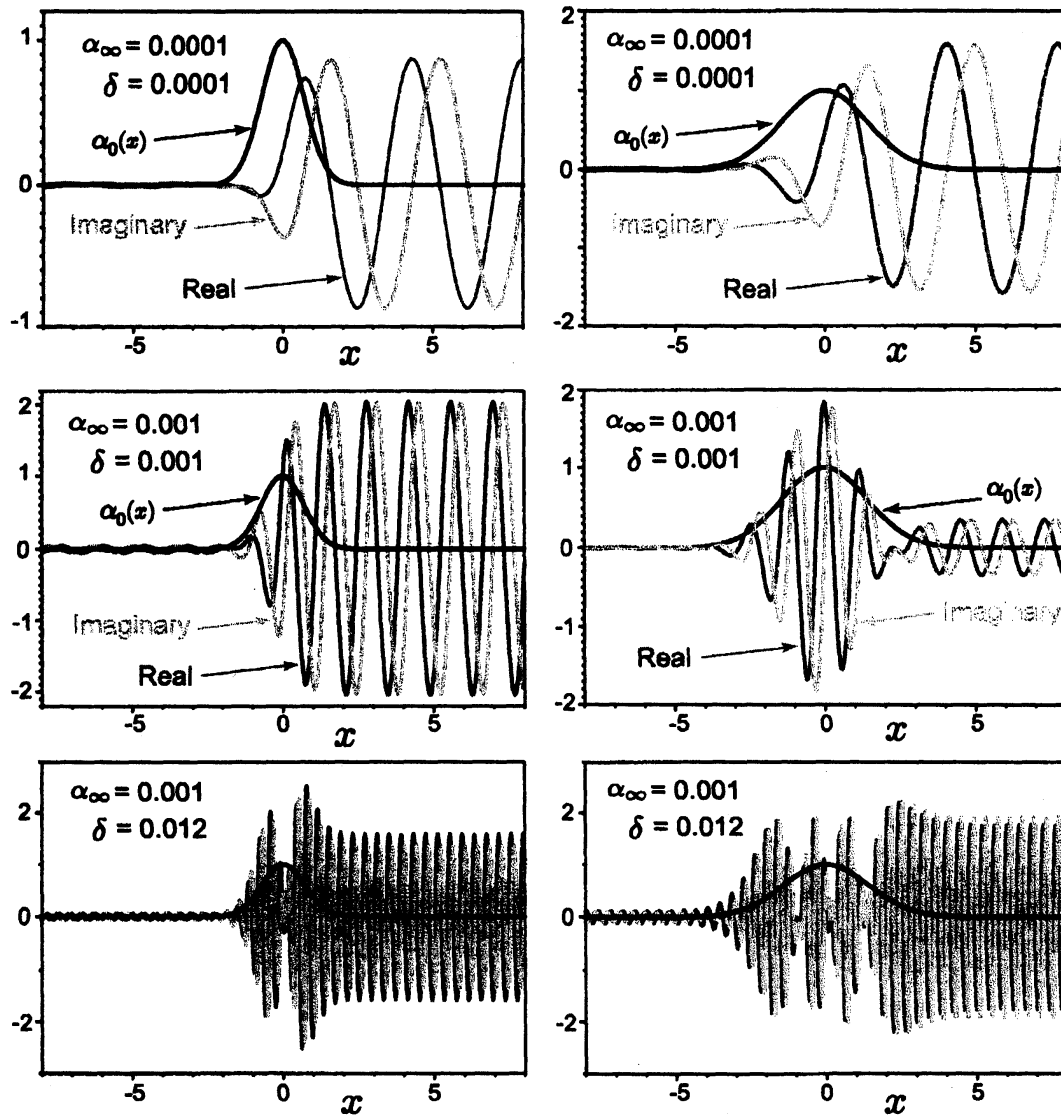
を採用する。これは、散乱波が、 $x \gg \ell$  の領域では  $x$  軸の正方向に進む波でなければならず、 $x \ll -\ell$  の領域では  $x$  軸の負方向に進む波でなければならないという条件である。

### 4.3 散乱波の振幅

散乱振幅に対する境界値問題 (43)–(45) を解けば、局在した気泡クラウドにより線形平面波が散乱される過程を調べることができる。結果を図 4 に示す。

#### 参考文献

- (1) たとえば, Drew, D. A., Mathematical Modeling of Two-Phase Flow, Ann. Rev. Fluid Mech. **15**, 261–291 (1983).
- (2) Egashira, R., Yano, T., and Fujikawa, S., Linear Wave Propagation of Fast and Slow Modes in Mixtures of Liquid and Gas Bubbles, Fluid Dyn. Res. **34**, 317–334 (2004).
- (3) Keller, J. B. and Miksis, M., Bubble Oscillations of Large Amplitude, J. Acoust. Soc. Am. **68**, 628–633 (1980).
- (4) Yano, T. Egashira, R., and Fujikawa, S., Linear Dispersive Waves in Bubbly Flows, Proceedings of Japan-US Seminar on Two-Phase Flow Dynamics, **1**, 51–59 (2004).
- (5) Eames, I. and Hunt, J. C. R., J. Fluid. Mech. **505**, 349–364 (2004).



⊠ 4: Real and imaginary parts of complex wave amplitude scattered by a bubble cloud.